حل تمرین‌های سری چهارم فرآیندهای تصادفی

۱- می‌دانیم طیف قدرت $X(t)$ محدود به باند $|f| \leq 0.5$ است، پس قانون نمونه‌برداری در مورد تابع همبستگی $R_X(\tau)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$R_X(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(kT) sinc(\frac{\tau - kT}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) sinc(\tau - k) \quad , \quad T = \frac{1}{2\times(0.5)} = 1$$

$$m_X(t) = 0 \ : \ R_X(\tau) = C_X(\tau) = R_0 sinc(\tau) + R_1 sinc(\tau - 1) + R_1 sinc(\tau + 1)$$

الف) چون $X(t)$ و $X(t-1)$ ناهمبسته هستند: $R_1 = C_X(1) = 0$.

$$\longrightarrow \quad R_X(\tau) = R_0 sinc(\tau) \quad , \quad P_X = R_X(0) = R_0 = 1 \quad \longrightarrow \quad R_X(\tau) = sinc(\tau) \quad \longrightarrow$$

$$S_X(f) = rect(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq 0.5 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

ب)

$$P_X = R_X(0) = R_0 + 2sinc(1)R_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad R_0 = 1$$

$$C_X(1.5) = R_X(1.5) = sinc(1.5)R_0 + \big(sinc(0.5) + sinc(2.5)\big)R_1 = 0$$

$$\longrightarrow \quad R_1 = \frac{-sinc(1.5)}{sinc(0.5) + sinc(2.5)} = \frac{5}{18}$$

$$\Rightarrow \quad R_X(\tau) = sinc(\tau) + \frac{5}{18} sinc(\tau - 1) + \frac{5}{18} sinc(\tau + 1) \quad \longrightarrow \quad R_X(1) = \frac{5}{18}$$

$$\Rightarrow \quad S_X(f) = rect(f)(1 + \frac{5}{9}\cos(2\pi f))$$

پ)

$$S_X(f) = 1 = 0.96\cos(2\pi f) = 1 + 0.48e^{j2\pi f} + 0.48e^{-j2\pi f} \quad \longrightarrow$$

$$S_X(z) = 1 + 0.48z^{-1} + 0.48z = \frac{16}{25}\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}z\right) = L_X(z)L_X^*(1/z^*)$$

$$\longrightarrow \quad L_X(z) = \frac{4}{5}\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)$$

۲-

الف) می‌توان $y[n]$ را خروجی یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(z)$ به $X[n]$ دانست:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad \longleftrightarrow \quad h[n] = 2^{-n}u[n] \quad \longrightarrow \quad Y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X[n-k]$$

ورودی سیستم ساکن و سیستم LTI است، لذا خروجی و ورودی تواماً ساکن می‌شوند.

$$R_{XY}[n+m, n] = R_{XY}[m] = R_{XX}[m] * h^*[-m] = 5h^*[-m] = 5 \times 2^m u[-m]$$

رابطهٔ فوق به‌ازای m مثبت صفر است، یعنی هر نمونهٔ X بر نمونه‌های قبلی Y عمود است.

$$R_{YY}[n+m, n] = R_{YY}[m] = h[m] * R_{XY}[m] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \times 5 \times 2^{m-k} u[k-m]$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\geq m}}^{\infty} 5\times 2^{m}\times 2^{-2k} = \begin{cases} 5\times 2^{m}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} = \dfrac{5}{1-1/4}\times 2^{m} & m\leq 0 \\ 5\times 2^{m}\sum_{k=m}^{\infty} 2^{-2k} = \dfrac{5}{1-1/4}\times 2^{-m} & m\geq 0 \end{cases} = \frac{20}{3}\times 2^{-|m|}$$

$$E\{|Y[n]|^2\} = R_{YY}[0] = \frac{20}{3}$$

ب)

$$Y[0] = \frac{1}{2}Y[-1] + X[0] = X[0]$$
$$Y[1] = \frac{1}{2}Y[0] + X[1] = \frac{1}{2}X[0] + X[1]$$
$$Y[2] = \frac{1}{2}Y[1] + X[2] = \frac{1}{4}X[0] + \frac{1}{2}X[1] + X[2]$$

به‌طور کلی $Y[m] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}X[n-k]\ ,\ m\geq 0$.

$$R_{XY}[n_1,n_2] = E\left\{\sum_{k=0}^{n_2} 2^{-k}X^{*}[n_2-k]X[n_1]\right\} = \sum_{k=0}^{n_2} 2^{-k}R_{XX}[n_1-n_2+k]$$
$$= 5\sum_{k=0}^{n_2} 2^{-k}\delta[k+n_1-n_2] = \begin{cases} 5\times 2^{-(n_2-n_1)}\ , & 0\leq n_2-n_1\leq n_2 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 5\times 2^{-(n_2-n_1)}\ , & n_2\geq n_1\geq 0 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$
$$R_{YY}[n_1,n_2] = \sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2} 2^{-k-l}R_{XX}[n_1-n_2-k+l] = 5\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2} 2^{-k-l}\delta[n_1-n_2-k+l]$$
$$= 5\sum_{k=0}^{n_1} 2^{-k-(k-n_1+n_2)} = 5\times 2^{n_1-n_2}\times \sum_{\substack{k=0\\k\geq n_1-n_2}}^{n_1} 2^{-2k}$$
$$= 5\times 2^{n_1-n_2}\times \begin{cases} \dfrac{1-2^{-2n_1-2}}{1-1/4} & n_1-n_2\leq 0 \\ \dfrac{2^{-2n_1+2n_2}-2^{-2n_1-2}}{1-1/4} & n_1-n_2\geq 0 \end{cases}$$
$$= \frac{20}{3}[2^{-|n_1-n_2|} - 2^{-2-n_1-n_2}]$$

البته رابطهٔ فوق برای $n_1\geq 0\ ,\ n_2\geq 0$ به‌دست آمده است و در حالتی‌که n_1 یا n_2 منفی باشد نمونه‌های فرآیند صفر و لذا تابع همبستگی هم صفر است.

$$E\{|Y(n)|^2\} = R_{YY}[n,n] = \frac{20}{3}[1-4^{-1-n}]u[n]$$

-۳

$$R_S[m] = 2^{-|m|} = 0.5^{|m|} \quad\longrightarrow\quad S_s(z) = \frac{1-0.5^2}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$

چون $S[n]$ و $V[n]$ بر هم عمود هستند:

$$S_X(z) = S_V(z) + S_S(z) = 5 + \frac{3/4}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} = \frac{28-10z-10z^{-1}}{5-2z-2z^{-1}}$$

ریشه‌های صورت: $\frac{1}{y_0^*} = 2.37979$ و $y_0 = 0.42020$

ریشه‌های مخرج: $1/z_0^*=2$ و $z_0 = 0.5$

در نتیجه:

$$S_X(z) = \frac{\frac{10}{y_0}(1 - y_0 z^{-1})(1 - y_0 z)}{\frac{2}{0.5}(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)} = L_X(z)L_X^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \longrightarrow$$

با انتخاب صفرها و قطب‌های داخل دایرهٔ واحد:

$$L_X(z) = \sqrt{\frac{10}{4y_0}}\,\frac{1 - y_0 z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{2.439 - 1.025z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{X(z)}{W(z)}$$

مدل ARMA(1,1) : $X[n] = 2.439W[n] + 0.5X[n-1] - 1.025W[n-1]$

۴-

الف) اگر از طرفین تبدیل Z بگیریم، خواهیم‌داشت:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k}z^{-k}X(z) = V(z) \longrightarrow \frac{V(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^k = \frac{d}{dv}\left(\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\right) \;,\; v = 1/(2z)$$

$$\longrightarrow \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{d}{dv}\left(\frac{v}{1-v}\right) = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

$$\longrightarrow \quad X(z) = (1 - z^{-1} + 0.25z^{-2})V(z) \quad \longrightarrow \quad X[n] = V[n] - V[n-1] + \frac{1}{4}V[n-2]$$

بنابراین، $X[n]$ یک فرآیند MA(2) است.

ب)

$$S_{XX}(z) = (1 - 0.5z^{-1})^2(1 - 0.5z)^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z\right)^2$$

$$= \frac{33}{16} - \frac{5}{4}z^{-1} - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^2$$

$$\longrightarrow \quad R_{XX}(m) = \frac{1}{4}\delta[m+2] - \frac{5}{4}\delta[m+1] + \frac{33}{16}\delta[m] - \frac{5}{4}\delta[m-1] + \frac{1}{4}\delta[m-2]$$

$$S_X(f) = S_{XX}\left(e^{j2\pi f}\right) = [\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)]^2$$

۵-

الف) $Y[n]$ فقط سه مقدار ۱، ۲، ۰/۵ را اختیار می‌کند.

$$\Pr\{Y[n_1] = 0.5\} = \Pr\{X[n_1] = 1 \,\&\, X[n_1 - 1] = 2\} = \Pr\{X[n_1] = 1\}\Pr\{X[n_1 - 1] = 2\} = \frac{2}{9}$$

$$\Pr\{Y[n_1] = 2\} = \Pr\{X[n_1] = 2 \,\&\, X[n_1 - 1] = 1\} = \Pr\{X[n_1] = 2\}\Pr\{X[n_1 - 1] = 1\} = \frac{2}{9}$$

$$\Pr\{Y[n_1] = 1\} = \Pr\{X[n_1] = 1 \,\&\, X[n_1 - 1] = 1\} + \Pr\{X[n_1] = 2 \,\&\, X[n_1 - 1] = 2\}$$

$$= \Pr\{X[n_1] = 1\}\Pr\{X[n_1 - 1] = 1\} + \Pr\{X[n_1] = 2\}\Pr\{X[n_1 - 1] = 2\} = \frac{5}{9}$$

$$f_{Y_1}(y) = \frac{5}{9}\delta(y-1) + \frac{2}{9}\delta(y-2) + \frac{2}{9}\delta(y-0.5) \;\longrightarrow\; \Phi_{Y_1}(\omega) = \frac{5}{9}e^{j\omega} + \frac{2}{9}e^{2j\omega} + \frac{2}{9}e^{j\omega/2}$$

ب)

$$m_Y[n] = E\{Y[n]\} = \frac{2}{9}\times 0.5 + \frac{5}{9}\times 1 + \frac{2}{9}\times 2 = \frac{10}{9}$$

برای محاسبهٔ $R_X[n_1,n_2]$ چهار حالت در نظر می‌گیریم:

1) $n_1 = n_2:\ \ R_X[n_1,n_2] = E\{|Y[n_1]|^2\} = \frac{2}{9}\times(0.5)^2 + \frac{5}{9}\times 1^2 + \frac{2}{9}\times 2^2 = \frac{3}{2}$

2) $n_1 - n_2 = 1:\ \ R_X[n_1,n_2] = E\{Y[n_1]Y[n_2]\} = E\left\{\frac{X[n_1]}{X[n_1-1]}\frac{X[n_2]}{X[n_2-1]}\right\} = E\left\{\frac{X[n_1]}{X[n_2-1]}\right\} = \frac{10}{9}$

3) $n_2 - n_1 = 1:\ \ R_X[n_1,n_2] = E\{Y[n_1]Y[n_2]\} = E\left\{\frac{X[n_1]}{X[n_1-1]}\frac{X[n_2]}{X[n_2-1]}\right\} = E\left\{\frac{X[n_2]}{X[n_1-1]}\right\} = \frac{10}{9}$

4) $|n_2 - n_1| > 1:\ R_X[n_1,n_2] = E\{Y[n_1]Y[n_2]\} = E\left\{\frac{X[n_1]}{X[n_1-1]}\right\}E\left\{\frac{X[n_2]}{X[n_2-1]}\right\} = \frac{10}{9}\times\frac{10}{9} = \frac{100}{81}$

$$\rightarrow\quad R_X[n+m,n] = R_X[m] = \begin{cases} \frac{3}{2} & m = 0 \\ \frac{10}{9} & m = \pm 1 \\ \frac{100}{81} & m \geq 2 \end{cases}$$

$$= \frac{100}{81} - \frac{10}{81}\delta[m-1] - \frac{10}{81}\delta[m+1] + \frac{43}{182}\delta[m]$$

پ) $\longrightarrow\quad S_X(f) = \frac{100}{81}\delta(f) + \frac{43}{182} - \frac{20}{81}\cos(2\pi f)$

۶-

الف)

$$S_X(f) = \frac{1}{1+\alpha^2 - \alpha e^{j2\pi f} - \alpha e^{-j2\pi f}} \longrightarrow S_X(z) = \frac{1}{1+\alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1}} = \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

$$\longrightarrow\quad S_X(z) = \frac{-\frac{z^{-1}}{\alpha}}{(1-\alpha z^{-1})\left(1-\frac{z^{-1}}{\alpha}\right)} = \frac{-\frac{1}{1-\alpha^2}}{1-\frac{z^{-1}}{\alpha}} + \frac{\frac{1}{1-\alpha^2}}{1-\alpha z^{-1}}$$

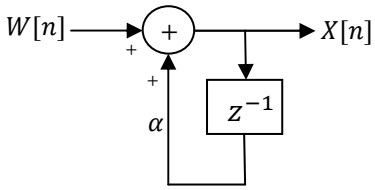
$$\longrightarrow\quad R_X[m] = \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{-m}u[-m-1] + \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^m u[m] \quad\longrightarrow\quad R_X[m] = \frac{\alpha^{|m|}}{1-\alpha^2}$$

$$m_X[n] = 0 \quad\longrightarrow\quad C_X[m] = R_X[m] \quad\longrightarrow\quad \rho = \frac{C_X[1]}{\sqrt{C_X[0]C_X[0]}} = \alpha$$

ب) فیلتر ابداع:

$$S_X(z) = \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} = L_X(z)L_X^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \longrightarrow L_X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad\longleftrightarrow\quad l_X[n] = \alpha^n u[n]$$

$$\longrightarrow\quad X[n] = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k w[n-k]$$



پ) $Y[n] = (\delta[n] - 2\alpha\delta[n-1] + \alpha^2\delta[n-2]) * X[n] \quad\longrightarrow$

پس فرآیند $Y[n]$ هم ساکن است با طیف قدرت زیر:

$$S_Y(z) = (1-2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2})(1-2\alpha z + \alpha^2 z^2)S_X(z)$$

$$= (1-2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2})(1-2\alpha z + \alpha^2 z^2)\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} = 1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1}$$

$$\longrightarrow \quad R_Y[m] = (1+\alpha^2)\delta[m] - \alpha\delta[m-1] - \alpha\delta[m+1]$$

۷-

الف)

$$R_{XX}[n_1,n_2] = E\{X(n_1)X^*(n_2)\} = \begin{cases} \overline{X}^2 = 0 & n_1 \neq n_2 \\ \overline{X^2} = 1 & n_1 = n_2 \end{cases} \longrightarrow \quad R_{XX}[m] = \delta[m] \quad \longrightarrow \quad S_{XX}(f) = 1$$

ب)

$$Y[n] = (2^{-n}u[n]) * X[n] \quad \longrightarrow \quad Y(z) = \frac{X(z)}{1-0.5z^{-1}} \quad \longrightarrow \quad S_{YY}(z) = \frac{S_{XX}(z)}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$

$$\longrightarrow \quad S_{YY}(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} \quad \longrightarrow \quad S_{YY}(f) = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)}$$

$$\longrightarrow \quad R_{YY}[m] = \frac{1}{1-(0.5)^2} \times 2^{-|m|} = \frac{4}{3} \times 2^{-|m|}$$

$$m_Y[n] = h[n] * m_X[n] \quad , \quad m_X[n] = 0 \quad \longrightarrow \quad m_Y[n] = 0$$

پ)

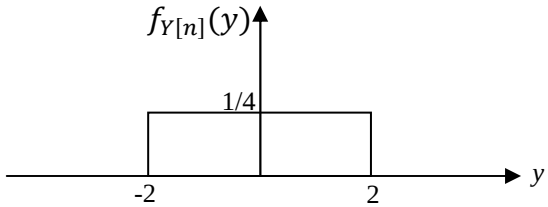
$$\Phi_{X[n]}(\omega) = E\left\{e^{j\omega X[n]}\right\} = \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \cos(\omega)$$

$$\Phi_{Y[n]}(\omega) = E\left\{e^{j\omega Y[n]}\right\} = E\left\{e^{j\omega \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}X[n-k]}\right\} = \prod_{k=0}^{\infty} E\left\{e^{j\omega 2^{-k}X[n-k]}\right\} = \prod_{k=0}^{\infty} \Phi_{X[n-k]}(2^{-k}\omega)$$

$$= \prod_{k=0}^{\infty} \cos(2^{-k}\omega)$$

$$\longrightarrow \quad \Phi_{Y[n]}(\omega) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=0}^{N} \cos(2^{-k}\omega) = \sin(2^{-N}\omega)\, cos(2^{-N}\omega)\, cos(2^{-N+1}\omega) \dots cos(\omega)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-N-1}\sin(2\omega)}{sin(2^{-N}\omega)} = \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} = sinc(4f) \qquad \longrightarrow \qquad f_{Y[n]}(y) = \frac{1}{4} rect\left(\frac{y}{4}\right)$$



ت) از بند (ب) داریم: $\quad X(z) = (1-0.5z^{-1})Y(z) \quad \longrightarrow \quad Y[n] - 0.5Y[n-1] = X[n]$

بنابراین، فرآیند $Y[n]$ یک فرآیند AR مرتبه اول است.

$$\Pr\{Y[n] \le y | Y[n-1] = y_{n-1}\ , Y[n-2] = y_{n-2}, \dots\}$$
$$= \Pr\{Y[n] - 0.5Y[n-1] \le y - 0.5y_{n-1} | Y[n-1] = y_{n-1}\ , Y[n-2] = y_{n-2}, \dots\}$$
$$= \Pr\{X[n] \le y - 0.5y_{n-1} | Y[n-1] = y_{n-1}\ , Y[n-2] = y_{n-2}, \dots\} = \Pr\{X[n] \le y - 0.5y_{n-1}\}$$
$$= F_{X[n]}(y - 0.5y_{n-1})$$

($\{Y[n-k]\}_{k=1}^{\infty}$ اطلاعی از مقدار $X[n]$ نمی‌دهد)

از طرفین نسبت به y مشتق می‌گیریم: $y - 0.5y_{n-1}$

$$f_{Y[n]}(y | y_{n-1}, y_{n-2,\dots}) = f_{X[n]}(y - 0.5y_{n-1}) = \frac{1}{2}\delta[y - 0.5y_{n-1} - 1] + \frac{1}{2}\delta[y - 0.5y_{n-1} + 1]$$

۸- فرآیند X را می‌توان خروجی سیستم با تابع تبدیل زیر به ورودی V دانست و چون قطب‌های سیستم همگی داخل دایره به شعاع واحد قرار دارند این سیستم علی است.

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \cdots$$

از تساوی فوق به‌ازای $z \to \infty$ داریم: $h[0] = \frac{b_0}{a_0} = b_0$.

$$S_{XX}(z) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}(b_0^* + h^*[1]z + h^*[2]z^2 + \cdots) \quad \longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} S_{XX}(z) = |b_0|^2 + b_0 h^*[1]z + b_0 h^*[2]z^2 + \cdots)$$

رابطهٔ فوق را به حوزهٔ زمان برمی‌گردانیم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_{XX}[m-k] = |b_0|^2\delta[m] + b_0 h^*[1]\delta[m+1] + b_0 h^*[2]\delta[m+2] + \cdots)$$

روشن است که:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_{XX}[m-k] = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ |b_0|^2 & m = 0 \end{cases}$$

یعنی همبستگی‌ها در رابطهٔ AR مشابهی صدق می‌کنند. همبستگی‌ها قابل سنجش هستند و روابط بالا به‌صورت یک دستگاه معادلات خطی روشی را برای تعیین پارامترهای معادلهٔ AR یعنی a_k و b_0 نشان می‌دهد.